ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 142 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-137-154
УДК 517.911, 517.929

Обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения с запаздыванием: общие свойства и особенности

Никита Сергеевич БОРЗОВ[1,2], **Татьяна Владимировна Жуковская**[3], **Ирина Дмитриевна Серова**[1]

[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»
392036, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

[2] ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН»
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

[3] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106/5

Аннотация. Рассматривается дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(h(t))\big), \quad t \geq 0, \quad x(s) = \varphi(s), \quad s < 0,$$

относительно неизвестной функции x, абсолютно непрерывной на каждом конечном отрезке. Предполагается, что функция $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ суперпозиционно измерима, функции $\varphi : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ измеримы и при п. в. $t \geq 0$ выполнено $h(t) \leq t$. Если имеет место более обременительное неравенство $h(t) \leq t - \tau$ при некотором $\tau > 0$, то задача Коши для этого уравнения однозначно разрешима и любое решение продолжаемо на всю полуось $\mathbb{R}_+$. В то же время задача Коши для соответствующего дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t)\big), \quad t \geq 0,$$

как известно, может иметь бесконечно много решений, а максимальный интервал существования решений может быть конечным. В статье рассмотрен вопрос, какими из перечисленных свойств обладает уравнение с запаздыванием (единственность решения или бесконечность множества решений, бесконечность или конечность максимального интервала существования решений), если функция h имеет всего лишь одну «критическую» точку $t_0 \geq 0$ — точку, для которой мера множества $\big\{t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap \mathbb{R}_+ : \, h(t) > t - \varepsilon\big\}$ является положительной при любом $\varepsilon > 0$. Оказывается, что при такой функции запаздывания свойства решений близки свойствам решений обыкновенного дифференциального уравнения. Кроме того, рассмотрена задача о зависимости решений уравнения с запаздыванием от функции h.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с запаздыванием, задача Коши, зависимость решения от функции запаздывания

Благодарности: Результаты раздела 1 получены третьим автором в Тамбовском государственном университете им. Г. Р. Державина при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/), результаты раздела 2 получены первым автором в Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-11-20131, https://rscf.ru/project/20-11-20131/)

Для цитирования: *Борзов Н.С., Жуковская Т.В., Серова И.Д.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения с запаздыванием: общие свойства и особенности // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 142. С. 137–154. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-137-154

SCIENTIFIC ARTICLES

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-137-154

Ordinary differential equations and differential equations with delay: general properties and features

Nikita S. BORZOV[1,2], **Tatyana V. Zhukovskaya**[3], **Irina D. Serova**[1]
[1] Derzhavin Tambov State University
33 International St., Tambov 392036, Russian Federation
[2] V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation
[3] Tambov State Technical University
106/5 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. We consider the differential equation with delay

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(h(t))\big), \quad t \geq 0, \quad x(s) = \varphi(s), \quad s < 0,$$

with respect to an unknown function x absolutely continuous on every finite interval. It is assumed that the function $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is superpositionally measurable, the functions $\varphi : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ are measurable, and $h(t) \leq t$ for a. e. $t \geq 0$. If the more burdensome inequality $h(t) \leq t - \tau$ holds for some $\tau > 0$, then the Cauchy problem for this equation is uniquely solvable and any solution can be extended to the semiaxis $\mathbb{R}_+$. At the same time, the Cauchy problem for the corresponding differential equation

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t)\big), \quad t \geq 0,$$

may have infinitely many solutions, and the maximum interval of existence of solutions may be finite. In the article, we investigate which of the listed properties a delay equation possesses (i.e. has a unique solution or infinitely many solutions, has finite or infinite maximum interval of existence of solutions), if the function h has only one «critical» point $t_0 \geq 0$, a point for which the measure of the set $\big\{t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap \mathbb{R}_+ : \ h(t) > t - \varepsilon\big\}$ is positive for any $\varepsilon > 0$. It turns out that for such a delay function, the properties of solutions are close to those of solutions of an ordinary differential equation. In addition, we consider the problem of the dependence of solutions of a delay equation on the function h.

Keywords: differential equation with delay, Cauchy problem, dependence of a solution on a delay function

Acknowledgements: The results of section 1 were obtained by the third author at Derzhavin Tambov State University with the support of the Russian Science Foundation (project no. 23-11-20020, https://rscf.ru/en/project/23-11-20020/), the results of section 2 were obtained by the first author V. A. Trapeznikov Institute of Control Problems RAS with the support of the Russian Science Foundation (project no. 20-11-20131, https://rscf.ru/en/project/20-11-20131/).

Mathematics Subject Classification: 34K05, 34A12.

For citation: Borzov N.S., Zhukovskaya T.V., Serova I.D. Ordinary differential equations and differential equations with delay: general properties and features. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 137–154. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-137-154 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Статья посвящена проблеме зависимости свойств множества решений уравнения с запаздывающим аргументом $h(t)$, выявлению эффектов, возникающих при сходимости $h(t)$ к функции, хотя бы в одной точке не имеющей запаздывания, т. е. совпадающей с t.

Вопросам непрерывной зависимости решений дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений от параметров посвящена многочисленная литература (см. монографии [1, § 4.1§ 9.4], [2, § 1.5], [3, гл. 189], статьи [4,5] и библиографические списки данных работ). Многие из этих исследований используют методы анализа, в частности, результаты о неподвижных точках (см. [6–8]), точках совпадения (см. [9, 10]), и возмущениях (см. [11–14]) регулярных отображений нормированных, метрических или частично упорядоченных пространств. Но такие исследования почти не затрагивают ситуации скачкообразного изменения решений и их важнейших свойств. «Импульсные» перестройки структуры множеств решений возможны, например, для уравнений с запаздывающим аргументом в случае, когда запаздывание $t-h(t)$ стремится к нулю, а уравнение превращается, соответственно, в обыкновенное дифференциальное уравнение. В частности, задача Коши для уравнения с положительным запаздыванием однозначно разрешима, и ее решение продолжаемо на всю полуось $\mathbb{R}_+$, а задача Коши для предельного обыкновенного дифференциального уравнения может иметь бесконечное множество решений, и максимальный интервал существования решений может быть конечным. В данной статье показано, что такое же скачкообразное изменение решений возможно и в случае, если функция положительного запаздывания стремится к функции запаздывания, положительной везде, кроме лишь одной точки (называемой в статье «критической»).

Отметим, что вопросы скачкообразного изменения решений относятся к предмету теории катастроф и теории особенностей (см. [15]), однако, большинство работ в этих областях математики более сосредоточены на вопросах перестройки решений обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [16–18]) и, как правило, не рассматривают изменения, возникающие в множестве решений функционально-дифференциальных уравнений. А вопросы кардинальной перестройки множества решений при стремлении запаздывания к нулю и превращении соответствующего уравнения с отклоняющимся аргументом в обыкновенное дифференциальное уравнение, насколько известно авторам данной статьи, в литературе не исследовались.

Основная часть предлагаемой статьи содержит три раздела. В первом рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения с положительным запаздыванием. Здесь показано, что при самых общих предположениях на функции, порождающие такое уравнение, задача Коши однозначно разрешима, и ее решение неограничено продолжаемо. Во втором разделе демонстрируются примеры дифференциальных уравнений, функция запаздывания которых содержит одну критическую точку $t_0 > 0$, и при этом множество решений задачи Коши бесконечно, а среди решений есть непродолжаемые на всю полуось $\mathbb{R}_+$. Таким образом, если функция положительного запаздывания сходится к функции, имеющей хотя бы одну критическую точку, то множество решений соответствующих уравнений при таком предельном переходе испытывает скачкообразные изменения. В третьем разделе показывается, что даже в случае скачкообразного изменения структуры множества решений при изменении запаздывания можно выделить конечный отрезок положительной длины в области определения решений, на котором решение непрерывно зависит от запаздывания.

1. Дифференциальное уравнение с положительным запаздыванием

Меру Лебега на прямой $\mathbb{R}$ будем называть *мерой* и будем обозначать ее символом mes. Обозначим через $L_{[0,T]}$, $AC_{[0,T]}$ и $C_{[0,T]}$ банаховы пространства, соответственно, суммируемых, абсолютно непрерывных и непрерывных на $[0,T] \subset \mathbb{R}_+$ ($T < \infty$) функций. Нормы в этих пространствах определяются формулами

$$\|x\|_L = \int_0^T |x(s)|\,ds, \quad \|x\|_{AC} = |x(0)| + \|\dot{x}\|_L, \quad \|x\|_C = \max_{t\in[0,T]} |x(t)|.$$

В работе рассматривается дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(h(t))\big), \quad t \geq 0, \quad x(s) = \varphi(s), \quad s < 0, \tag{1.1}$$

в котором «функция предыстории» $\varphi : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ измерима и существенно ограничена, функция $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ измерима и при п.в. $t \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет неравенству $h(t) \leq t$, функция $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *суперпозиционно измерима* (например, удовлетворяет условиям Каратеодори или их обобщениям, см. [19, 20]), то есть для любой измеримой функции $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ композиция $f(\cdot, u(\cdot)) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ также измерима. Кроме того, предполагается, что для любого $r > 0$ и любых $u \in [-r, r]$ функция $\widehat{f}_r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$\widehat{f}_r(t) = \sup_{u\in[-r,r]} \big|f(t,u)\big|, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.2}$$

является суммируемой на каждом конечном отрезке, принадлежащим $\mathbb{R}_+$ (заметим, что измеримость функции $\widehat{f}_r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ следует из [21, следствие 1.5.9]).

Запишем уравнение (1.1) в виде

$$\dot{x}(t) = f\big(t, (S_h x)(t)\big), \quad t \geq 0, \quad \text{где} \quad (S_h x)(s) = \begin{cases} x(h(s)), & \text{если } h(s) \geq 0, \\ \varphi(h(s)), & \text{если } h(s) < 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Представление уравнения (1.1) в виде (1.3) позволяет дать следующее определение его решения (см. [1, § 1.1]).

Пусть $T > 0$. *Решением уравнения* (1.1), *определенным на* $[0,T]$, называем абсолютно непрерывную на этом отрезке функцию, удовлетворяющую (1.3) при п. в. $t \in [0,T]$, а *решением, определенным на* $[0,T)$ или $[0,\infty)$ называем функцию, абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке, принадлежащем этому интервалу, и удовлетворяющую (1.3) при п. в. $t \in [0,T)$, соответственно, при п. в. $t \in [0,\infty)$. В случае $T < \infty$ решение называем *локальным*. Если решение x_{J_1} определено на множестве J_1, решение x_{J_2} определено на J_2 и имеют место соотношения

$$J_1 \subset J_2 \quad \text{и} \quad x_{J_1}(t) = x_{J_2}(t) \quad \text{при} \quad t \in J_1,$$

то x_{J_2} называется *продолжением решения* x_{J_1}, а x_{J_1} — *частью решения* x_{J_2}. Решение x_J, определенное на некотором множестве J, называется *максимально продолженным*, если оно не является частью никакого другого решения. В этом случае множество J называется *максимальным интервалом существования* данного решения.

Определение решения как элемента пространства абсолютно непрерывных функций со значениями в $\mathbb{R}$, а не в бесконечномерном банаховом пространстве, предложенное

Н. В. Азбелевым более 50 лет назад (см. [1, § 1.1]), позволило распространить на уравнения с отклоняющимся аргументом фундаментальные результаты о представлении общего решения, о краевых задачах, задачах управления и вариационных задачах, известные для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [2–4]). Это определение не требует «непрерывной стыковки» решения и начальной функции, т. е. возможно $x(0) \neq \varphi(0)$, более того, в этом и следующем параграфе статьи непрерывность функции φ не требуется, предполагается лишь ее измеримость. Но, безусловно, случай непрерывной функции φ и непрерывное ее продолжение решением не отвергается принятым нами определением решения, эта ситуация соответствует задаче Коши с начальным условием $x(0) = \varphi(0)$. Такая задача будет рассмотрена в разделе 3. статьи, где будет исследоваться зависимость решения этой задачи от изменения функции запаздывания.

Вначале рассмотрим частный случай уравнения (1.1) — дифференциальное уравнение с постоянным запаздыванием $\tau > 0$. Такое уравнение имеет вид

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t-\tau)\big), \quad t \geq 0, \quad x(s) = \varphi(s), \quad s < 0. \tag{1.4}$$

Вполне очевидно, что любое решение уравнения (1.4) может быть неограничено продолжено, точнее, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Задача Коши для уравнения* (1.4) *с начальным условием*

$$x(0) = \alpha \tag{1.5}$$

при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет единственное определенное на всей полуоси $\mathbb{R}_+$ решение $x(\cdot)$, и любое локальное решение является частью этого решения.

Доказательство. Решение задачи (1.4), (1.5) может быть получено на каждом из интервалов $(i\tau, (i+1)\tau]$, $i = 0, 1, \dots,$ в виде функции $x(t) = u_i(t)$, $t \in (i\tau, (i+1)\tau]$, определяемой рекуррентными формулами

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= \alpha + \int_0^t f\big(s, \varphi(s-\tau)\big)\, ds \ \text{ при } \ t \in (0, \tau];\\
u_1(t) &= u_0(\tau) + \int_\tau^t f\big(s, u_0(s-\tau)\big)\, ds \ \text{ при } \ t \in (\tau, 2\tau];\\
u_i(t) &= u_{i-1}(i\tau) + \int_{i\tau}^t f\big(s, u_{i-1}(s-\tau)\big)\, ds \ \text{ при } \ t \in (i\tau, (i+1)\tau], \quad i = 1, 2, \dots .
\end{aligned}$$

В первой из этих формул, в силу суммируемости на отрезке $[0, \tau]$ при любом r функции $\widehat{f}_r$ и существенной ограниченности на этом отрезке функции $s \mapsto \varphi(s-\tau)$, подынтегральная функция $s \mapsto f\big(s, \varphi(s-\tau)\big)$ суммируема. Следовательно, функция $u_0(\cdot)$ абсолютно непрерывна. Далее, во второй из этих формул, в силу суммируемости на отрезке $[\tau, 2\tau]$ функции $\widehat{f}_r$ и ограниченности на этом отрезке непрерывной функции $s \mapsto u_0(s-\tau)$, подынтегральная функция $s \mapsto f\big(s, u_0(s-\tau)\big)$ суммируема. Следовательно, функция $u_1(\cdot)$ абсолютно непрерывна. Таким образом доказывается, что при всех $i = 0, 1, \dots$ функция $u_i(\cdot)$ абсолютно непрерывна. Итак, существование определенного на всей полуоси $\mathbb{R}_+$ решения задачи (1.4), (1.5) установлено.

Предположим, что существует некоторое локальное решение $\widetilde{x}(\cdot)$, отличное на его области определения от решения $x(\cdot)$. Определим множество

$$E = \big\{t : \widetilde{x}(t) \neq x(t)\big\} \subset \mathbb{R}_+$$

и найдем наименьший из номеров i таких, что мера множества $E \cap (i\tau, (i+1)\tau]$ положительна. Тогда на интервале $((i-1)\tau, i\tau]$ значения функций $\widetilde{x}(t), x(t)$ совпадают, $\widetilde{x}(t) = x(t) = u_{i-1}(t)$. Остается заметить, что в силу уравнения (1.4) его решение на $(i\tau, (i+1)\tau]$ однозначно определяется по «предыстории» — функции u_{i-1}. □

Утверждение теоремы 1.1 без труда переносится на более общее уравнение (1.1) с запаздывающим аргументом.

Теорема 1.2. *Пусть для любого $T > 0$ существует $\tau > 0$ такое, что при п. в. $t \in [0, T]$ выполнено неравенство $h(t) \le t - \tau$. Тогда задача Коши для уравнения (1.1) с начальным условием (1.5) при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет единственное определенное на всей полуоси $\mathbb{R}_+$ решение $x(\cdot)$, и любое локальное решение является частью этого решения.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.1.

2. Уравнение с запаздыванием, имеющим критическую точку

Для измеримой функции $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, определяющей отклонение аргумента в уравнении (1.1), теперь будем предполагать, что при п. в. $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено неравенство $h(t) \le t$.

Точку $t_0 \ge 0$ будем называть *левой критической для функции* h, если мера множества $\big\{t \in (t_0 - \varepsilon, t_0) : h(t) > t - \varepsilon\big\}$ является положительной при любом $\varepsilon > 0$, и *правой критической для функции* h, если мера множества $\big\{t \in (t_0, t_0 + \varepsilon) : h(t) > t - \varepsilon\big\}$ является положительной при любом $\varepsilon > 0$. Очевидно, что для левой критической точки t_0 выполнено строгое неравенство $t_0 > 0$. Точку $t_0 \ge 0$ называем *критической для функции* h, если она является левой или правой или одновременно и левой, и правой критической.

Следующие две теоремы показывают, что в левой критической точке может «закончиться» максимальный интервал существования решения, а правая точка может стать «точкой рождения» бесконечного множества продолжений локального решения.

Теорема 2.1. *Пусть в уравнении (1.1) функция запаздывания h имеет одну критическую точку $t_0 > 0$, являющуюся левой критической точкой. Тогда на интервале $[0, t_0)$ задача Коши (1.1), (1.5) имеет единственное решение $x(\cdot)$, и любое другое локальное решение совпадает с решением $x(\cdot)$ на пересечении их областей определения. Кроме того, имеет место следующая альтернатива: либо для сужения решения $x(\cdot)$ на произвольный отрезок $[0, T]$, $T < t_0$ выполнено $\lim_{T \to t_0 - 0} \|x(\cdot)\|_{AC_{[0,T]}} = \infty$, и в этом случае максимальным интервалом определения решений задачи (1.1), (1.5) является интервал $[0, t_0)$, либо $\lim_{T \to t_0 - 0} \|x(\cdot)\|_{AC_{[0,T]}} < \infty$, и тогда решение $x(\cdot)$ продолжаемо единственным образом на всю полуось $\mathbb{R}_+$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что при произвольном $T \in (0, t_0)$ существует такое $\tau = \tau(T) > 0$, что $h(t) \le t - \tau$ при п. в. $t \in [0, T]$. Предположим, что требуемое число $\tau = \tau(T) > 0$ не существует. Тогда при любом натуральном i для $\tau_i = i^{-1}$ на некотором множестве $E_i \subset [0, T]$ положительной меры выполнено $h(t) > t - \tau_i$. Множества E_i упорядочены по вложению, т. е. $E_{i+1} \subset E_i$. Теперь определим множество

$$\overline{E}_i = \big\{t \in [0, T] : \forall \delta > 0 \ \operatorname{mes}\big([t, t + \delta] \cap E_i\big) > 0\big\}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

которое не пусто, поскольку $\operatorname{mes} E_i > 0$. Положим $\theta_i = \inf \overline{E}_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Так как множества E_i упорядочены по вложению, определенная таким образом последовательность

$\{\theta_i\}$ возрастает и ограничена, и поэтому сходится к некоторому $\theta \in [0,T]$. Для любого $\delta > 0$ существует натуральное I такое, что $\theta_i \in [\theta-\delta,\theta]$ при всех $i > I$. Следовательно,

$$[\theta_i,\theta_i+\delta] \subset [\theta-\delta,\theta+\delta], \quad \mathrm{mes}\big([\theta-\delta,\theta+\delta]\cap E_i\big) > 0 \text{ при всех } i > I.$$

Полученное неравенство означает, что точка θ критическая, но по условию теоремы в отрезке $[0,T]$ нет критических точек.

Итак, для произвольного $T \in (0,t_0)$ при п. в. $t \in [0,T]$ выполнено $h(t) \le t-\tau$, где $\tau > 0$. Это неравенство, согласно теореме 1.2, гарантирует, что на интервале $[0,t_0)$ задача Коши (1.1), (1.5) имеет единственное решение $x_{t_0}(\cdot)$, и любое другое локальное решение совпадает с решением $x_{t_0}(\cdot)$ на пересечении их областей определения.

Функция $(0,t_0) \ni T \mapsto \|x_{t_0}(\cdot)\|_{AC_{[0,T]}}$ возрастает. Возможны две ситуации: либо эта функция ограничена, либо $\lim_{T\to t_0-0}\|x_{t_0}(\cdot)\|_{AC_{[0,T]}} = \infty$. В первой ситуации существует конечный $\lim_{T\to t_0-0}\|x_{t_0}(\cdot)\|_{AC_{[0,T]}}$, и поэтому существует $\widetilde{x} = \lim_{t\to t_0-0} x_{t_0}(t) < \infty$. Определим функцию

$$\widetilde{\varphi} : (-\infty,t_0) \to R, \quad \widetilde{\varphi}(s) = \begin{cases} \varphi(s) & \text{при } s \in (-\infty,0), \\ x_{t_0}(s) & \text{при } s \in [0,t_0), \end{cases} \tag{2.1}$$

и рассмотрим задачу

$$\dot{x}(t) = f\big(t,x(h(t))\big), \quad t \ge t_0; \quad x(s) = \widetilde{\varphi}(s), \quad s < t_0; \quad x(0) = \widetilde{x}. \tag{2.2}$$

На множестве $[t_0,\infty)$ у функции h нет критических точек. Повторив приведенные выше рассуждения, получим, что для любого $T > t_0$ существует $\tau = \tau(T) > 0$ такое, что при п. в. $t \in [t_0,T]$ выполнено неравенство $h(t) \le t-\tau$. Согласно теореме 1.2 на всем $[t_0,\infty)$ задача Коши (2.2) имеет единственное решение $x(\cdot)$, и любое другое локальное решение этой задачи совпадает с решением $x(\cdot)$ на пересечении их областей определения.

Для завершения доказательства остается заметить, что искомым единственным максимально определенным решением исходной задачи (1.1), (1.5) является функция со значениями $x_{t_0}(t)$ при $t \in [0,t_0)$ и $x(t)$ при $t \in [t_0,\infty)$. □

Теорема 2.2. *Пусть в уравнении* (1.1) *функция запаздывания* h *имеет одну критическую точку* $t_0 \ge 0$, *являющуюся правой критической точкой. Тогда на отрезке* $[0,t_0]$ (*если* $t_0 = 0$, *отрезок вырождается в одноточечное множество*) *задача Коши* (1.1), (1.5) *имеет единственное решение* $x(\cdot)$, *и любое другое локальное решение совпадает с решением* $x(\cdot)$ *на пересечении их областей определения. Кроме того, если для некоторого* $\delta > 0$ *при п. в.* $t \in [t_0,t_0+\delta]$ *функция* $f(t,\cdot)$ *непрерывна, то любое локальное решение уравнения* (1.1), *включая решение* $x(\cdot)$, *продолжаемо на всю полуось* $\mathbb{R}_+$ *и имеет место следующая альтернатива: либо это продолжение единственно, либо решений, определенных на полуоси бесконечно много, но при этом для произвольного* $\sigma > 0$ *любое решение, определенное на интервале* $[0,t_0+\sigma)$, *имеет единственное продолжение на* $\mathbb{R}_+$.

Доказательство. Утверждение теоремы о решении на отрезке $[0,t_0]$ тривиально, если $t_0 = 0$. Рассмотрим ситуацию $t_0 > 0$.

Так как сужение функции h на отрезок $[0,t_0]$ не имеет критических точек, как показано при доказательстве теоремы 2.2, существует $\tau > 0$ такое, что $h(t) \le t-\tau$ при п. в.

$t \in [0, t_0]$. В силу этого неравенства на $[0, t_0]$ существует локальное решение x_{t_0}, причем это решение определяется равенством

$$x_{t_0}(t) = u_{i_0+1}(t),$$

где i_0 — целая часть действительного числа t_0/τ, а значения $u_{i_0+1}(t)$, вычисляются по формулам:

$$u_0(t) = \varphi(t) \ \text{при} \ t < 0;$$

$$u_1(t) = \begin{cases} u_0(t) & \text{при} \ t < 0, \\ \alpha + \int_0^t f\bigl(s, u_0(h(s))\bigr)\, ds & \text{при} \ t \in [0, \tau]; \end{cases}$$

$$u_i(t) = \begin{cases} u_{i-1}(t) & \text{при} \ t \le (i-1)\tau, \\ u_{i-1}((i-1)\tau) + \int_{(i-1)\tau}^t f\bigl(s, u_{i-1}(h(s))\bigr)\, ds & \text{при} \ t \in ((i-1)\tau, i\tau], \end{cases} \qquad i = 2, \ldots, i_0;$$

$$u_{i_0+1}(t) = \begin{cases} u_{i_0}(t) & \text{при} \ t \le i_0\tau, \\ u_{i_0}(i_0\tau) + \int_{i_0\tau}^t f\bigl(s, u_{i_0}(h(s))\bigr)\, ds & \text{при} \ t \in (i_0\tau, t_0]. \end{cases}$$

Для доказательства продолжаемости локального решения x_{t_0} рассмотрим задачу (2.2) с функцией «предыстории» (2.1), а начальное значение положим равным $\widetilde{x} = x_{t_0}(t_0)$. Запишем эту задачу в виде эквивалентного интегрального уравнения

$$x(t) = \widetilde{x} + \int_{t_0}^t f\bigl(s, (S_h x)(s)\bigr)\, ds, \quad t \ge t_0; \ \text{где} \ (S_h x)(s) = \begin{cases} x(h(s)), & \text{если} \ h(s) \ge t_0, \\ \widetilde{\varphi}(h(s)), & \text{если} \ h(s) < t_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Зададим

$$r = 1 + \max\Bigl\{ \max_{t \in [0, t_0]} |x(t)|, \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in (-\infty, 0)} |\varphi(s)| \Bigr\}$$

и для определенной формулой (1.2) функции $\widehat{f}_r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ найдем такое $\Delta > 0$, что

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta} \widehat{f}_r(t)\, dt \le 1.$$

Рассмотрим действующий в пространстве $C_{[t_0, t_0+\Delta]}$ непрерывных на отрезке $[t_0, t_0+\Delta]$ функций интегральный оператор $(Fx)(t) = \widetilde{x} + \int_{t_0}^t f\bigl(s, (S_h x)(s)\bigr)\, ds$. Так как функция f удовлетворяет условиям Каратеодори и ее мажоранта — функция $\widehat{f}_r$ суммируема, оператор $F : C_{[t_0, t_0+\Delta]} \to C_{[t_0, t_0+\Delta]}$ непрерывен. Шар $B_C(0, r)$ с центром в нулевой функции радиуса r отображается этим оператором в себя. Кроме того, для любой функции $x \in B_C(0, r)$ и любых $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + \Delta]$ выполнено

$$\bigl|(Fx)(t_2) - (Fx)(t_1)\bigr| = \Bigl| \int_{t_1}^{t_2} f\bigl(s, (S_h x)(s)\bigr)\, ds \Bigr| \le \int_{t_1}^{t_2} \widehat{f}_r(s)\, ds,$$

поэтому множество $F\bigl(B_C(0, r)\bigr)$ является равностепенно непрерывным, следовательно, компактным. Согласно теореме Шаудера, оператор F имеет в шаре $B_C(0, r)$ неподвижную точку, обозначим ее $\widetilde{x}_\Delta$. Полученная непрерывная функция $\widetilde{x}_\Delta$ является решением уравнения (2.3), следовательно, эта функция абсолютно непрерывна, и эта функция есть локальное решение задачи (2.2), определенное на $[t_0, t_0 + \Delta]$. Соответственно, решением исходной задачи (1.1), (1.5) является функция $x_{t_0+\Delta}$ со значениями $x_{t_0}(t)$ при $t \in [0, t_0)$ и $\widetilde{x}_\Delta(t)$ при $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$.

Для нахождения продолжения этого решения надо рассмотреть дифференциальное уравнение на интервале $[t_0 + \Delta, \infty)$, соответствующее уравнению (1.1), с функцией «предыстории»

$$\widetilde{\varphi} : (-\infty, t_0 + \Delta) \to R, \quad \widetilde{\varphi}(s) = \begin{cases} \varphi(s) & \text{при } s \in (-\infty, 0), \\ x_{t_0+\Delta}(s) & \text{при } s \in [0, t_0 + \Delta]. \end{cases}$$

На множестве $[t_0 + \Delta, \infty)$ у функции h нет критических точек. Поэтому, рассуждениями, примененными при доказательстве теоремы 2.1, устанавливается, что для любого значения $T > t_0 + \Delta$ существует $\tau > 0$ такое, что при п. в. $t \in [t_0 + \Delta, T]$ выполнено неравенство $h(t) \le t - \tau$. Согласно теореме 1.2 на всем $[t_0 + \Delta, \infty)$ задача Коши для рассматриваемого уравнения имеет единственное решение $x(\cdot)$, и любое другое локальное решение этой задачи совпадает с решением $x(\cdot)$ на пересечении их областей определения.

Если продолжение решения x_{t_0} на множество $[0, t_0 + \Delta]$ единственно (в том смысле, что любое локальное решение совпадает с x_{t_0} на пересечении областей определения этих решений), то и построенное определенное на $\mathbb{R}_+$ решение также единственно. Утверждение теоремы в этом случае выполнено.

Предположим теперь, что существует локальное решение $u(\cdot)$, отличающееся на некотором множестве от решения $x(\cdot)$. Тогда значения этих функций должны отличаться на множестве $[t_0, t_0 + \delta]$ при любом $\delta > 0$ (если на этом множестве решения совпадают, то вследствие отсутствия критических точек, больших чем $t_0 + \delta$, решения совпадут и на всем пересечении их областей определения). Согласно [22, предложение 6] множество сужений на $[t_0, t_0 + \delta]$ решений интегрального уравнения (2.3) при достаточно малых значениях $\delta > 0$ есть связное подмножество пространства $C_{[t_0, t_0+\delta]}$ непрерывных на $[t_0, t_0 + \delta]$ функций. Поэтому, кроме решений $x(\cdot)$ и $u(\cdot)$, задача имеет еще бесконечное множество решений, и каждое из них имеет единственное продолжение на $[t_0, \infty)$. □

Для иллюстрации теорем 2.1, 2.2 приведем примеры дифференциальных уравнений вида (1.1), функция запаздывания которых имеет лишь одну критическую точку t_0, и если она левая (в примере 2.1), среди решений задачи Коши есть непродолжаемые на всю полуось $\mathbb{R}_+$, а если правая (в примере 2.2), множество решений задачи Коши бесконечно. Примеры также демонстрируют, что изменения начального условия либо параметров уравнения могут привести к тому, что соответствующие задачи Коши становятся однозначно разрешимыми на всей полуоси, несмотря на то, что функция запаздывающего аргумента остается неизменной (конечно, как и ее критическая точка).

П р и м е р 2.1. Пусть функция $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ задана формулой

$$h(t) = \begin{cases} 2t - 1 & \text{при} \quad t \in [0, 1], \\ t - 1 & \text{при} \quad t \in (1, \infty). \end{cases}$$

Эта функция имеет левую критическую точку $t_0 = 1$.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = \frac{\sqrt[3]{16}}{3}\big(x(h(t))\big)^4, \quad t \ge 0; \quad x(s) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-s}}, \quad s < 0, \tag{2.4}$$

с начальным условием

$$x(0) = 1.$$

Несложно проверить, что решением этой задачи Коши является функция

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-t}}, \quad t \in [0,1).$$

Иных решений у рассматриваемой задачи нет. Интервал $[0,1)$ есть максимальный интервал определения этого решения.

Отметим, что для рассматриваемого уравнения (2.4) решение задачи Коши с любым начальным условием

$$x(0) = \alpha$$

имеет такой же максимальный интервал определения. При таком начальном условии решением является функция

$$x(t) = \alpha - 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{1-t}}, \quad t \in [0,1).$$

Теперь изменим в уравнении (2.4) функцию предыстории на нулевую, т. е. будем полагать $x(s) = 0$ при $s < 0$. В таком случае решение задачи Коши с любым начальным условием $x(0) = \alpha$ единственно, продолжаемо на всю полуось $\mathbb{R}_+$ и определяется соотношением $x(t) = u_i(t)$, $t \in (i\tau, (i+1)\tau]$, где

$$u_0(t) = \alpha \text{ при } t \in (0,1];$$
$$u_1(t) = \alpha + \frac{\sqrt[3]{16}}{3}\alpha^4(t-1) \text{ при } t \in (1,2];$$
$$u_i(t) = u_{i-1}(i) + \frac{\sqrt[3]{16}}{3}\int_i^t \big(u_{i-1}(s-1)\big)^4\,ds \text{ при } t \in (i, i+1], \quad i = 2, 3, \ldots .$$

Пример 2.2. Пусть функция $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ задана формулой

$$h(t) = \begin{cases} t^2 & \text{при } \ t \in [0, 1/2], \\ t - 1/2 & \text{при } \ t \in (1/2, \infty). \end{cases}$$

Эта функция имеет правую критическую точку $t_0 = 0$.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = 3\sqrt[3]{x(h(t))}, \quad t \geq 0. \tag{2.5}$$

Заметим, что рассматриваемое уравнение не нуждается в определении «функции предыстории», так как $h(t) \geq 0$ на $\mathbb{R}_+$. На всей полуоси $\mathbb{R}_+$ решением уравнения (2.5) с начальным условием

$$x(0) = 0$$

является нулевая функция, а также функция $x(\cdot)$, значения которой $x(t) = u_i(t)$ при $t \in (i/2, (i+1)/2]$, $i = 0, 1, \ldots,$ определяются следующими соотношениями

$$u_0(t) = t \text{ при } t \in \Big(0, \frac{1}{2}\Big];$$
$$u_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{9}{4}\Big(t - \frac{1}{2}\Big)^{4/3} \text{ при } t \in \Big(\frac{1}{2}, 1\Big];$$
$$u_i(t) = u_{i-1}\Big(\frac{i}{2}\Big) + 3\int_{i/2}^t \sqrt[3]{u_{i-1}\Big(s - \frac{1}{2}\Big)}\,ds \text{ при } t \in \Big(\frac{i}{2}, \frac{i+1}{2}\Big], \quad i = 2, 3, \ldots .$$

Согласно теореме 2.2, кроме предъявленных выше двух решений задача имеет еще бесконечное множество решений, и каждое из них единственным образом продолжаемо на всю полуось $\mathbb{R}_+$.

Отметим, что для рассматриваемого в этом примере уравнения (2.5) решение задачи Коши с любым отличным от нуля начальным значением имеет единственное определенное на всей полуоси $\mathbb{R}_+$ решение $x(\cdot)$, и любое локальное решение является частью этого решения.

Теоремы 2.1, 2.2 позволяют исследовать дифференциальное уравнение (1.1) также и в случае, когда критические точки являются одновременно левыми и правыми. Такую ситуацию описывает следующее утверждение, прямо вытекающее из этих теорем.

Следствие 2.1. *Пусть в уравнении* (1.1) *функция* h *имеет одну критическую точку* $t_0 > 0$, *причем, эта критическая точка является и левой, и правой. Тогда на интервале* $[0, t_0)$ *задача Коши* (1.1), (1.5) *имеет единственное решение* $x(\cdot)$, *и любое другое локальное решение совпадает с решением* $x(\cdot)$ *на пересечении их областей определения. Кроме того, имеет место следующая альтернатива: либо для сужения решения* $x(\cdot)$ *на произвольный отрезок* $[0, T]$, $T < t_0$ *выполнено* $\lim_{T\to t_0-0} \|x(\cdot)\|_{AC_{[0,T]}} = \infty$, *и в этом случае максимальным интервалом определения решений задачи* (1.1), (1.5) *является интервал* $[0, t_0)$, *либо* $\lim_{T\to t_0-0} \|x(\cdot)\|_{AC_{[0,T]}} < \infty$. *Во втором случае, если для некоторого* $\delta > 0$ *при п. в.* $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ *функция* $f(t, \cdot)$ *непрерывна, то любое локальное решение уравнения* (1.1), *включая решение* $x(\cdot)$, *продолжаемо на всю полуось* $\mathbb{R}_+$, *это продолжение либо единственно, либо решений, определенных на полуоси бесконечно много, но при этом для произвольного* $\sigma > 0$ *любое решение, определенное на интервале* $[0, t_0 + \sigma)$, *имеет единственное продолжение на* $\mathbb{R}_+$.

3. Зависимость решений задачи Коши от запаздывающего аргумента

Здесь мы рассмотрим следующую задачу.

Пусть заданы такие удовлетворяющие требованиям теоремы 1.2 (поэтому не имеющие критических точек) функции $h_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, что при п. в. $t \in \mathbb{R}_+$ последовательность $\{h_n(t)\}$ сходится к $h(t)$ слева, т. е. $h_n(t) \le h(t)$ на $\mathbb{R}_+$, причем, предельная функция $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ обладает критической точкой. Рассмотрим последовательность задач Коши

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(h_n(t))\big), \quad t \ge 0; \quad x(s) = \varphi(s), \quad s < 0; \quad x(0) = \alpha. \tag{3.1}$$

При любом натуральном n задача (3.1) имеет единственное определенное на $\mathbb{R}_+$ решение x_n, продолжающее любое локальное решение. Нас интересует вопрос, сходится ли (в каком-либо либо смысле) последовательность $\{x_n\}$ к решению x предельного уравнения (1.1) с начальным условием (1.5). Напомним, что согласно теоремам 2.1 и 2.2 решение x предельного уравнения может быть не единственным и, возможно, имеет конечный максимальный интервал определения.

Будем предполагать, что функция «предыстории» $\varphi : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна и ограничена, функция $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям Каратеодори, т. е. измерима по первому и непрерывна по второму аргументам. Кроме того, как и выше, полагаем, что определяемая формулой (1.2) функция $\widehat{f}_r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ при любом $r > 0$ является суммируемой на каждом конечном отрезке. Но в отличие от предыдущих параграфов, где начальное значение α было любым, здесь его положим равным $\alpha = \varphi(0)$. Таким образом, в данном параграфе предполагается «непрерывная стыковка» решения с начальной функцией. Существенность этого условия для сходимости $x_n \to x$ демонстрируется ниже в примере 3.1. Сначала сформулируем два утверждения о непрерывной зависимости решения задачи Коши от функции запаздывания в случаях наличия у предельной функции запаздывания левой и правой критических точек.

Теорема 3.1. *Пусть предельная функция h имеет одну критическую точку $t_0 > 0$, являющуюся левой критической точкой. Тогда для любого $T \in (0, t_0)$ последовательность сужений x_{nT} на замкнутый отрезок $[0,T]$ максимально продолженных решений x_n задач (3.1) равномерно сходится к сужению x_T на тот же отрезок $[0,T]$ максимально продолженного решения x задачи (1.1), (1.5).*

Доказательство. Выберем любое $T \in (0, t_0)$. На отрезке $[0,T]$ у функции h нет критических точек и, как показано при доказательстве теоремы 2.1, для некоторого $\tau > 0$ при п. в. $t \in [0,T]$ выполнено $h(t) \le t - \tau$. Следовательно, $h_n(t) \le h(t) \le t - \tau$, $n = 1, 2, \ldots,$ п. в. на $[0,T]$. Вследствие полученного неравенства решение x_{nT} на $[0,T]$ задачи (3.1) при любом натуральном n определяется равенством

$$x_{nT}(t) = u_{i_0+1}(t),$$

где i_0 — целая часть действительного числа T/τ, а значения $u_{i_0+1}(t)$, вычисляются по формулам:

$$u_0(t) = \varphi(t) \ \text{ при } \ t < 0;$$

$$u_1(t) = \begin{cases} u_0(t) & \text{при } \ t < 0, \\ \alpha + \int_0^t f\big(s, u_0(h_n(s))\big)\,ds & \text{при } \ t \in [0, \tau]; \end{cases}$$

$$u_i(t) = \begin{cases} u_{i-1}(t) & \text{при } \ t \le (i-1)\tau, \\ u_{i-1}((i-1)\tau) + \int_{(i-1)\tau}^t f\big(s, u_{i-1}(h_n(s))\big)\,ds & \text{при } \ t \in ((i-1)\tau, i\tau], \end{cases} \qquad i = 2, \ldots, i_0;$$

$$u_{i_0+1}(t) = \begin{cases} u_{i_0}(t) & \text{при } \ t \le i_0\tau, \\ u_{i_0}(i_0\tau) + \int_{i_0\tau}^t f\big(s, u_{i_0}(h_n(s))\big)\,ds & \text{при } \ t \in (i_0\tau, t_0]. \end{cases}$$

Используя приведенные соотношения, покажем ограниченность последовательностей решений $\{x_{nT}\}$ и их производных $\{\dot{x}_{nT}\}$.

В этих соотношениях значения функций $u_i(t)$, $i = 1, \ldots, i_0 + 1$, при $t \le i\tau$ удовлетворяют неравенствам $|u_i(t)| \le r_i$, где

$$r_0 = \max\big\{|\alpha|, \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in (-\infty, 0)} |\varphi(t)|\big\}, \quad r_i = r_{i-1} + \int_0^\tau \widehat{f}_{r_{i-1}}(s)\,ds.$$

Таким образом, на отрезке $[0,T]$ при любом натуральном n выполнено

$$|x_{nT}(t)| \le r_{i_0+1}, \quad |\dot{x}_{nT}(t)| \le \widehat{f}_{r_{i_0+1}}(t),$$

ограниченность последовательностей решений задачи (3.1) и их производных установлена.

Вследствие ограниченности на отрезке $[0,T]$ последовательности производных $\dot{x}_{nT}(\cdot)$ одной суммируемой функцией, все функции $x_{nT}(\cdot)$ равностепенно непрерывны на этом отрезке. Согласно теореме Арцела–Асколи последовательность $\{x_{nT}\}$ относительно компактна в пространстве $C_{[0,T]}$. Пусть $\tilde{x}_T$ — предельная точка этой последовательности, т. е. некоторая подпоследовательность $\{x_{n_jT}\}$ равномерно сходится к $\tilde{x}_T$.

Покажем, что для п. в. $t \in [0,T]$ имеет место сходимость $(S_{h_{n_j}}x_{n_jT})(t) \to (S_h\widetilde{x}_T)(t)$ при $j \to \infty$. Для этого рассмотрим каждое слагаемое в правой части неравенства

$$\bigl|(S_{h_{n_j}}x_{n_jT})(t) - (S_h\widetilde{x}_T)(t)\bigr| \le \bigl|(S_{h_{n_j}}x_{n_jT})(t) - (S_hx_{n_jT})(t)\bigr| + \bigl|(S_hx_{n_jT})(t) - (S_h\widetilde{x}_T)(t)\bigr|.$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Поскольку функции x_{n_jT}, $n = 1, 2, \dots$, равностепенно непрерывны, а функция φ равномерно непрерывна, существует такое $\sigma > 0$, что при любых $t_1, t_2 \in [0,T]$ из $|t_1 - t_2| < \sigma$ следует $|x_{n_jT}(t_1) - x_{n_jT}(t_2)| < 2^{-1}\varepsilon$ и $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < 2^{-1}\varepsilon$. Для п. в. $t \in [0,T]$ определим натуральное j_0 такое, что при всех $j > j_0$ справедливо неравенство $|h_{n_j}(t) - h(t)| < \sigma$. Таким образом, для п. в. $t \in [0,T]$ при $j > j_0$ получаем

$$\bigl|(S_{h_{n_j}}x_{n_jT})(t) - (S_hx_{n_jT})(t)\bigr| < 2^{-1}\varepsilon. \tag{3.2}$$

Вследствие равномерной сходимости $x_{n_jT} \to \widetilde{x}_T$ существует натуральное j_1 такое, что при любом $j > j_1$ для всех $t \in [0,T]$ справедливо неравенство $|x_{n_jT}(t) - \widetilde{x}_T(t)| < 2^{-1}\varepsilon$. Таким образом, при $j > j_1$ для всех $t \in [0,T]$ получаем

$$\bigl|(S_hx_{n_jT})(t) - (S_h\widetilde{x}_T)(t)\bigr| < 2^{-1}\varepsilon. \tag{3.3}$$

Из неравенств (3.2), (3.3) следует, что для п. в. $t \in [0,T]$ при всех $j > \max\{j_0, j_1\}$ выполнено

$$\bigl|(S_{h_{n_j}}x_{n_jT})(t) - (S_h\widetilde{x}_T)(t)\bigr| < \varepsilon.$$

Итак, доказана сходимость $(S_{h_{n_j}}x_{n_jT})(t) \to (S_h\widetilde{x}_T)(t)$ (при $j \to \infty$) для п. в. $t \in [0,T]$.

Теперь докажем, что $\widetilde{x}_T$ является решением задачи (1.1), (1.5), определенным на $[0,T]$.

При п. в. $t \in [0,T]$ из непрерывности функции $f(t,\cdot)$ следует, что последовательность $\{f\bigl(t, (S_{h_{n_j}}x_{n_jT})(t)\bigr)\}$ сходится к $f\bigl(t, (S_h\widetilde{x}_T)(t)\bigr)$. А так как к тому же функции $f\bigl(t, (S_{h_{n_j}}x_{n_jT})(t)\bigr)$, $n = 1, 2, \dots$, в совокупности ограничены одной суммируемой функцией, согласно теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$x_{n_jT}(t) = \alpha + \int_0^t f\bigl(s, (S_{h_{n_j}}x_{n_jT})(s)\bigr)\,ds \to \alpha + \int_0^t f\bigl(s, (S_h\widetilde{x}_T)(s)\bigr)\,ds \ \text{ для всех } t \in [0,T].$$

В то же время, $x_{n_jT}(t) \to \widetilde{x}_T(t)$. Поэтому получаем равенство

$$\widetilde{x}_T(t) = \alpha + \int_0^t f\bigl(s, (S_h\widetilde{x}_T)(s)\bigr)\,ds, \quad t \in [0,T],$$

которое означает, что $\widetilde{x}_T$ — решение задачи (1.1), (1.5).

Итак, любая предельная точка компактной в пространстве $C_{[0,T]}$ последовательности $\{x_{nT}\}$ есть единственное решение $\tilde{x}_T$ на $[0,T]$ задачи (1.1), (1.5). Так как предельная точка единственная, эта компактная последовательность является сходящейся. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть предельная функция h имеет одну критическую точку $t_0 \geq 0$, являющуюся правой критической точкой. Тогда*

- *при $n \to \infty$ последовательность сужений $x_{n\,t_0}$ на замкнутый отрезок $[0, t_0]$ максимально продолженных решений x_n задач (3.1) равномерно сходится к сужению x_{t_0} на тот же отрезок $[0, t_0]$ любого максимально продолженного решения x задачи (1.1), (1.5);*

- *для любого $T \in (t_0, \infty)$ последовательность сужений $x_{n\,T}$ на замкнутый отрезок $[0, T]$ максимально продолженных решений x_n, $n = 1, 2, \ldots$, задач (3.1) компактна в пространстве $C_{[0,T]}$, и любая ее предельная точка есть сужение x_T на $[0, T]$ некоторого максимально продолженного решения x задачи (1.1), (1.5).*

Доказательство. Так как на отрезке $[0, t_0]$ функция h не имеет критических точек, то существует $\tau > 0$ такое, что $h(t) \leq t - \tau$ при п. в. $t \in [0, t_0]$. Повторяя рассуждения, применявшиеся для доказательства теоремы 3.1, установим, что на этом отрезке решение $x_{n\,t_0}$ задачи (3.1) при каждом n единственно, а также, что существует и единственно решение x_{t_0} краевой задачи (1.1), (1.5), и имеет место равномерная сходимость $x_{n\,t_0} \to x_{t_0}$. Первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения зафиксируем произвольное $T \in (t_0, \infty)$. Согласно теореме 2.2 любое локальное решение задачи (3.1) при любом n продолжаемо на отрезок $[0, T]$. Докажем, что производные всех таких решений ограничены в совокупности одной суммируемой функцией.

Из равномерной на $[0, t_0]$ сходимости $x_{n\,t_0} \to x_{t_0}$ следует, что все непрерывные функции $x_{n\,t_0}$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничены, т. е. существует такое $A > 0$, что $|x_{n\,t_0}(t)| \leq A$ при любых $n = 1, 2, \ldots$ и всех $t \in [0, t_0]$. Положим

$$r_0 = 2 + \max\big\{A, \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in (-\infty, 0)} |\varphi(s)|\big\}$$

и для определенной формулой (1.2) функции $\widehat{f}_{r_0} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ найдем такое $\Delta > 0$, что

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta} \widehat{f}_{r_0}(t)\,dt \leq 1.$$

Заметим, что вследствие неотрицательности функции $\widehat{f}_{r_0}$ при любом $\delta \in [0, \Delta]$ выполнено

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta} \widehat{f}_{r_0}(t)\,dt \leq \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \widehat{f}_{r_0}(t)\,dt \leq 1.$$

Покажем, что при любом n любое определенное на $[0, t_0 + \Delta]$ решение $x_{n\,t_0+\Delta}$ задачи (3.1) удовлетворяет неравенству $\big|x_{n\,t_0+\Delta}(t)\big| \leq r_0$ при всех t. При $t \in [0, t_0]$ это неравенство, очевидно, выполнено, более того, на этом отрезке $\big|x_{n\,t_0+\Delta}(t)\big| \leq r_0 - 2$. Поэтому, если требуемое неравенство нарушается, то $\big|x_{n\,t_0+\Delta}(t_1)\big| > r_0$ в некоторой точке $t_1 \in (t_0, t_0 + \Delta]$. В силу непрерывности функции $x_{n\,t_0+\Delta}$ найдется точка $\bar{t}_1 \in (t_0, t_1) \subset (t_0, t_0 + \Delta]$ такая, что $\big|x_{n\,t_0+\Delta}(\bar{t}_1)\big| = r_0$ и $\big|x_{n\,t_0+\Delta}(t)\big| < r_0$ при всех $t < \bar{t}_1$. Но эти два соотношения противоречат друг другу, так как

$$\begin{aligned} r_0 = \big|x_{n\,t_0+\Delta}(\bar{t}_1)\big| &\leq \big|x_{n\,t_0+\Delta}(t_0 + \Delta)\big| + \int_{t_0+\Delta}^{\bar{t}_1} \big|f(s, (S_{h_n} x_{n\,t_0+\Delta})(s)\big|\,ds \\ &\leq \big|x_{n\,t_0+\Delta}(t_0 + \Delta)\big| + \int_{t_0+\Delta}^{\bar{t}_1} \widehat{f}_{r_0}(s)\,ds \leq (r_0 - 2) + 1. \end{aligned}$$

Итак, доказано, что при любом n для решения $x_{n\,t_0+\Delta}$ задачи (3.1) выполнено

$$\left|x_{n\,t_0+\Delta}(t)\right| \le r_0, \quad t \in (t_0, t_0+\Delta],$$

а следовательно, его производная оценивается неравенством

$$\left|\dot{x}_{n\,t_0+\Delta}(t)\right| \le \widehat{f}_{r_0}(t), \quad t \in (t_0, t_0+\Delta].$$

Теперь при любом $T > t_0+\Delta$ получим аналогичные оценки для определенных на $[0,T]$ решений x_{nT}, $n = 1,2,\ldots.$ задачи (3.1).

Функция h на отрезке $[t_0+\Delta, T]$ не имеет критических точек, поэтому существует $\tau > 0$ такое, что при всех n на этом отрезке справедливы неравенства $h_n(t) \le h(t) \le t-\tau$. Учитывая эти неравенства, рассуждениями, примененными в доказательстве теоремы 3.1, установим, что при любом n имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
&\left|x_{nT}(t)\right| \le r_i, && \left|\dot{x}_{nT}(t)\right| \le \widehat{f}_{r_i}(t), \quad t \in (t_0+\Delta+\tau(i-1), t_0+\Delta+\tau i], \quad i = 1,2,\ldots,i_0,\\
&\left|x_{nT}(t)\right| \le r_{i_0+1}, && \left|\dot{x}_{nT}(t)\right| \le \widehat{f}_{r_{i_0+1}}(t), \quad t \in (t_0+\Delta+\tau i_0, T],
\end{aligned}$$

где $r_i = r_{i-1} + \int_0^\tau \widehat{f}_{r_{i-1}}(s)\,ds$, а натуральное i_0 есть целая часть числа $(T-t_0-\Delta)/\tau$.

Таким образом, на отрезке $[0,T]$ последовательность производных $\dot{x}_{nT}(\cdot)$ решений задачи (3.1) ограничена одной суммируемой функцией $\widehat{f}_{r_{i_0+1}}(\cdot)$. Следовательно, функции $x_{nT}(\cdot)$, $n = 1,2,\ldots,$ равностепенно непрерывны на этом отрезке. Согласно теореме Арцела–Асколи последовательность $\{x_{nT}\}$ относительно компактна в пространстве $C_{[0,T]}$. Повторяя рассуждения, примененные в доказательстве теоремы 3.1, докажем, что любая предельная точка $\tilde{x}_T$ этой последовательности является решением задачи (1.1), (1.5). □

Следующий пример демонстрирует существенность условия «непрерывной стыковки» в теоремах 3.1, 3.2.

П р и м е р 3.1. Пусть функции $h, h_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ заданы формулой

$$h(t) = \begin{cases} t-1 & \text{при} \quad t \in [0,1], \\ 0 & \text{при} \quad t \in (1,\infty). \end{cases} \qquad h_n(t) = \begin{cases} t-1-n^{-1} & \text{при} \quad t \in [0,1], \\ -n^{-1} & \text{при} \quad t \in (1,\infty). \end{cases}$$

Рассмотрим задачи

$$\dot{x}(t) = (x(h_n(t)), \quad t \ge 0; \quad x(s) = 1, \quad s < 0, \quad x(0) = 0, \ \text{где} \ n = 1,2,\ldots, \tag{3.4}$$

$$\dot{x}(t) = (x(h(t)), \quad t \ge 0; \quad x(s) = 1, \quad s < 0, \quad x(0) = 0. \tag{3.5}$$

Очевидно, здесь при любом n выполнено $h_n(t) \le h(t)$, а при $n \to \infty$ имеет место сходимость $h_n(t) \to h(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Функция h не имеет критических точек, тем не менее последовательность решений x_n задач (3.4) не сходится к решению x предельной задачи (3.5). Действительно, эти решения определяются формулами:

$$x_n(t) = t, \quad x(t) = \begin{cases} t & \text{при} \quad t \in [0,1], \\ 1 & \text{при} \quad t \in (1,\infty). \end{cases}$$

References

[1] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1991. [N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rahmatullina, *Introduction to the Theory of Functional Differential Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1991 (In Russian)].

[2] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения*, Институт компьютерных исследований, М., 2002. [N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rahmatullina, *Elements of the Modern Theory of Functional Differential Equations. Methods and Applications*, Institute for Computer Research, Moscow, 2002 (In Russian)].

[3] В. П. Максимов, *Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. Избранные труды.*, ПГУ ПСИ ПССГК, Пермь, 2003. [V. P. Maksimov, *Questions of the General Theory of Functional Differential Equations. Selected Works.*, PGU PSI PSSGK, Perm', 2003 (In Russian)].

[4] N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, P. M. Simonov, "Theory of functional differential equations and applications", *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **69**:2 (2011), 203–235.

[5] Е. С. Жуковский, "Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра", *Матем. сб.*, **197**:10 (2006), 33–56; англ. пер.:E. S. Zhukovskii, "Continuous dependence on parameters of solutions to Volterra's equations", *Sb. Math.*, **197**:10 (2006), 1435–1457.

[6] Е. О. Бурлаков, Е. С. Жуковский, "Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра с локально сжимающими операторами", *Изв. вузов. Матем.*, 2010, №8, 16–29; англ. пер.:E. O. Burlakov, E. S. Zhukovskii, "The continuous dependence of solutions to Volterra equations with locally contracting operators on parameters", *Russian Mathematics*, **54**:8 (2010), 12–23.

[7] Е. О. Бурлаков, Е. С. Жуковский, "О корректности краевых задач и непрерывной зависимости периодических решений управляемых систем от параметров", *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2010, №1, 11–21. [E. O. Burlakov, E. S. Zhukovskiy, "On a correctness of boundary value problems and continuous dependence of periodic solutions of controllable systems on parameters", *Vestn. Udmurtsk. un-ta. Matem. Mekh. Komp'yut. nauki*, 2010, №1, 11–21 (In Russian)].

[8] E. Burlakov, E. Zhukovskiy, A. Ponosov, J. Wyller, "Existence, uniqueness and continuous dependence on parameters of solutions to neural field equations", *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, **65** (2015), 35–55.

[9] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, "Накрывающие отображения, действующие в нормированные пространства, и точки совпадения", *Оптимальное управление и дифференциальные игры*, Сборник статей, Труды МИАН, **315**, МИАН, М., 2021, 19–25; англ. пер.:A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, "Covering mappings acting into normed spaces and coincidence points", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **315** (2021), 13–18.

[10] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, "Об устойчивой разрешимости нелинейных уравнений относительно вполне непрерывных возмущений", *Функциональные пространства, теория приближений и смежные вопросы анализа*, Сборник статей. К 115-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского, Труды МИАН, **312**, МИАН, М., 2021, 7–21; англ. пер.:A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, "Stable Solvability of Nonlinear Equations under Completely Continuous Perturbations", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **312** (2021), 1–15.

[11] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, "О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной", *Дифференциальные уравнения*, **47**:11 (2011), 1523–1537; англ. пер.:A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskii, S. E. Zhukovskii, "On the well-posedness of differential equations unsolved for the derivative", *Differential Equations*, **47**:11 (2011), 1541–1555.

[12] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **75**:3 (2012), 1026–1044.

[13] Е. С. Жуковский, В. Мерчела, "Метод исследования интегральных уравнений, использующий множество накрывания оператора Немыцкого в пространствах измеримых функций", *Дифференциальные уравнения*, **58**:93–104 (2022); англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, W. Merchela, "A method for studying integral equations by using a covering set of the Nemytskii operator in spaces of measurable functions", *Differential Equations*, **58**:92–103 (2022).

[14] С. Бенараб, Е. А. Панасенко, “Об одном включении с отображением, действующим из частично упорядоченного пространства в множество с рефлексивным бинарным отношением”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **32**:3 (2022), 361–382. [S. Benarab, E. A. Panasenko, “Ob odnom vklyuchenii s otobrazheniem, dejstvuyushchim iz chastichno uporyadochennogo prostranstva v mnozhestvo s refleksivnym binarnym otnosheniem”, *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki*, **32**:3 (2022), 361-382 (In Russian)].

[15] В. И. Арнольд, *Теория катастроф*, Наука, М., 1990. [V. I. Arnold, *Catastrophe Theory*, Nauka Publ., Moscow, 1990 (In Russian)].

[16] И. А. Богаевский, “Неявные обыкновенные дифференциальные уравнения: перестройки и усиление эквивалентности”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:6 (2014), 5–20; англ. пер.:I. A. Bogaevsky, “Implicit ordinary differential equations: bifurcations and sharpening of equivalence”, *Izv. Math.*, **78**:6 (2014), 1063–1078.

[17] А. А. Давыдов, “Особенности типичного дохода в модели Арнольда циклических процессов”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Труды МИАН, **250**, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2005, 79–94; англ. пер.:A. A. Davydov, “Generic profit singularities in Arnold's model of cyclic processes”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **250** (2005), 70–84.

[18] А. А. Давыдов, Е. Мена Матош, “Типичные фазовые переходы и особенности выгоды в модели Арнольда”, *Матем. сб.*, **198**:1 (2007), 21–42; англ. пер.:A. A. Davydov, H. Mena Matos, “Generic phase transitions and profit singularities in Arnol'd's model”, *Sb. Math.*, **198**:1 (2007), 17–37.

[19] И. В. Шрагин, “Суперпозиционная измеримость при обобщенных условиях Каратеодори”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **19**:2 (2014), 476–478. [I. V. Shragin, “Superpositional measurability under generalized caratheodory conditions”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **19**:2 (2014), 476–478 (In Russian)].

[20] И. Д. Серова, “Суперпозиционная измеримость многозначной функции при обобщенных условиях Каратеодори”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:135 (2021), 305–314. [I. D. Serova, “Superpositional measurability of a multivalued function under generalized Caratheodory conditions”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:135 (2021), 305–314 (In Russian)].

[21] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальних включений*, 2-е изд., Либроком, М., 2011, 224 с. [Yu. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, V. V. Obuhovskij, *Introduction to the Theory of Multivalued Mappings and Differential Inclusions*, 2nd ed., Librocom Publ., Moscow, 2011 (In Russian), 224 pp.]

[22] Е. С. Жуковский, “О связности множеств решений включений”, *Матем. сб.*, **210**:6 (2019), 82–110; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “Connectedness of the solution sets of inclusions”, *Sb. Math.*, **210**:6 (2019), 836–861.

Информация об авторах

Борзов Никита Сергеевич, аспирант, кафедра функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: borzov-nikita@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0009-0005-7439-0405

Жуковская Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4374-4336

Information about the authors

Nikita S. Borzov, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: borzov-nikita@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0009-0005-7439-0405

Tatiana V. Zhukovskaia, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4374-4336

Серова Ирина Дмитриевна, аспирант, кафедра функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: irinka_36@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4224-1502

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Серова Ирина Дмитриевна
E-mail: irinka_36@mail.ru

Поступила в редакцию 20.05.2023 г.
Поступила после рецензирования 05.06.2023 г.
Принята к публикации 09.06.2023 г.

Irina D. Serova, Post-Graduate Student. Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation.
E-mail: irinka_36@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4224-1502

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Irina D. Serova
E-mail: irinka_36@mail.ru

Received 20.05.2023
Reviewed 05.06.2023
Accepted for press 09.06.2023